

Integrale - Änderungsrate

In den letzten Jahren kamen Integralaufgaben im Wahlteil verstärkt im Zusammenhang mit Änderungsraten vor.

Beispiele:

- Käuferzahlen pro Monat
- Momentangeschwindigkeit
- Zufluss- und Abflussrate
- Geburts- und Sterberate

Was ist zu beachten?

Eine Änderungsrate kann „geteilt“ angegeben sein, in Form einer Zuwachs- und einer Abnahmerate.

Erst die Zuwachs- und Abnahmerate zusammen ergeben die Änderungsrate.

Das Integral über die Änderungsrate ergibt dann den Bestand.

Beispiele:

- Käuferzahlen pro Monat $\rightarrow$ Anzahl Käufer
- Momentangeschwindigkeit $\rightarrow$ Zurückgelegter Weg
- Zufluss- und Abflussrate $\rightarrow$ Wassermenge
- Geburts- und Sterberate $\rightarrow$ Bevölkerungszahl

Was ist zu beachten?

Vergessen Sie nicht, bei Ihren Berechnungen einen möglichen Anfangsbestand einzubeziehen!

Bei einer Zufluss- und Abflussrate von Wasser liefert das Integral die Wassermenge, die im Beobachtungszeitraum hinzu- oder abgeflossen ist.

Wenn der Wasserbehälter zu Beobachtungsbeginn bereits eine Menge Wasser enthielt, so muss diese Menge hinzugezählt werden. Erst dann haben Sie die Gesamtmenge!

Wahlteil 2017 – Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

Die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten Smartphone-App soll modelliert werden.

Dabei wird die momentane Änderungsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0,5t} ; t \geq 0$$

(t in Monaten nach der Einführung, $f(t)$ in Käufer pro Monat).

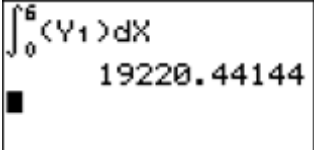
- c) Ermitteln Sie die Gesamtzahl der Käufer sechs Monate nach Einführung der App.
Bestimmen Sie den Zeitraum von zwei Monaten, in dem es 5000 neue Käufer gibt.

(3,5 VP)

Wahlteil 2017 – Analysis A 1

c) Anzahl der Käufer sechs Monate nach Einführung

Die gesuchte Anzahl ergibt sich aus dem Integral $\int_0^6 f(t)dt$.
Zur Berechnung mit dem GTR geben Sie hierzu den
Ausdruck aus der nebenstehenden Abbildung ein.



A calculator screen showing the integral of a function y1 from 0 to 6. The expression $\int_0^6 \langle y_1 \rangle dx$ is displayed, followed by the result 19220.44144.

Ergebnis:

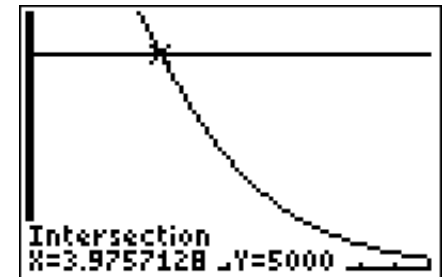
Sechs Monate nach Einführung haben 19.221 Personen die App gekauft.

Wahlteil 2017 – Analysis A 1

Zweimonatiger Zeitraum mit 5.000 neuen Käufern

Wir bezeichnen den noch unbekannten Startzeitpunkt mit T . Zwei Monate später bedeutet folglich $T + 2$. Wir haben also die Gleichung $\int_T^{T+2} f(t) dt = 5000$ zu lösen.

Geben Sie das Integral bei Y_2 im GTR ein, den Wert 5000 bei Y_3 und lassen Sie sich die beiden Graphen zeichnen. Mit 2ND CALC intersect bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven bei $x \approx 3,98$.



Ergebnis:

Im Zeitraum von 3,98 bis 5,98 Monaten nach Einführung kaufen 5.000 Personen die App.

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

Aufgabe A 2.1

An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 ; t \geq 0$$

Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch die Funktion a mit

$$a(t) = 19 ; t \geq 0$$

(t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $z(t)$ und $a(t)$ in $1000 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$).

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

- b) Zu Beobachtungsbeginn befinden sich $2\,500\,000\text{ m}^3$ Wasser im See. Bestimmen Sie die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum um $144\,000\text{ m}^3$ zunimmt.
Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee $4\,180\,000\text{ m}^3$ betragen würde?

(5,5 VP)

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

b) Wassermenge 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn

Die Änderungsrate ist wie in Teilaufgabe a) beschrieben gegeben durch $z(t) - a(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6$. Die Wassermenge im Stausee ist folglich gegeben durch

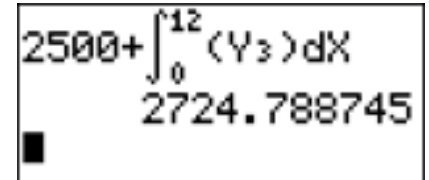
$$W(t) = 2500 + \int_0^{12} \left(20 \sin\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 6\right) dt$$

Beachten Sie, dass die Änderungsrate in $1000 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ gemessen wird.

Dementsprechend geben wir die Wassermenge in Einheiten zu 1000m^3 an. In der obigen Formel muss daher die anfängliche Wassermenge mit 2.500 angegeben werden und nicht mit 2.500.000!

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

Wenn wie in Teilaufgabe a) bei Y_3 im GTR noch die momentane Änderungsrate steht, können Sie nun im Berechnungsmodus eingeben, was Sie in der Abbildung rechts sehen.


$$2500 + \int_0^{12} (Y_3) dX$$
$$2724.788745$$

Unter Beachtung, dass der Wert wieder in m^3 umgerechnet werden muss, erhalten Sie folgendes

Ergebnis: 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich etwa
2.724.788 m^3 im See.

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

Wasserzunahme nach jedem 24-Stunden-Zeitraum

Die Periode der Funktion $\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ berechnet sich mit $p = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24$.

Das bedeutet, dass auch die Änderungsrate in einem 24-Stunden-Rhythmus schwankt. Die tatsächliche Zunahme ergibt sich nun durch

$$\int_0^{24} \left(20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 6\right) dt$$

Beachte, dass die Wassermenge zu Beobachtungsbeginn hier natürlich keine Rolle spielt. Der GTR liefert den Wert 144.

Ergebnis: In einem 24-Stunden-Rhythmus nimmt die Wassermenge im Stausee um 144.000 m³ zu.

Wahlteil 2017 – Analysis A 2

Neuer Wert für Abflussrate (GTR)

Die Wassermenge im Stausee nach 14 Tagen = 336 Stunden ist gegeben durch Anfangsmenge + Zuflussrate – Abflussrate, also gilt

$$4180 = 2500 + \int_0^{336} \left(20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 25 \right) dt - 336a$$

Mit dem GTR ergibt sich

$$4180 = 2500 + 8400 - 336a$$

Nach a aufgelöst folgt wiederum $a = 20$.

Ergebnis: Die neue Abflussrate beträgt $20.000 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$